3996047671976798375994455004948926773043124113935044622340850507111765583510003404873082921501328557557405008450263549585668423493085296404925501147904980525543924051417414676226633809964153003016276046368322871649316164184957706099254540052413584603115238875395834378096407295440844168750156936437852134606869615140897682685277401984397187058217295565624982104493345594672897168412274436703671643480698487769322205969116119200988786324477457388580681632114549526418546285658051099868031457439506777637241176737006589105389663729105764976529777539993344102835756931749505800511657958342307429551547664340412251297383083490061350815823296012334198550933284553542859326037050156921150333650474290663221838986913941771398298743832817061510204420200496517742638978309820412833593072908113179591916104281423410561163136384442921615218694997423087899869990980304182948367288742459397024108951926641679976438564046810203626607589173754656250263040151952835 27

IntegerLength[%] = 951

Spróbujmy teraz rozwiązać to zadanie tradycyjnie; najpierw zajmiemy się „całkowitością” rozpatrywanej liczby: licznik jest parzysty, a jego ostatni składnik jest podzielny przez 3; ponadto liczba $1^{1992} + 2^{1993}$ jest podzielna przez 3… (o znowu trzy kropki!). A teraz liczba cyfr rozpatrywanej liczby: zauważmy, że największy „wkład” ma składnik 3^{1994}, znajdźmy ilość cyfr tej liczby. Nietrudno zauważyć, że ilość cyfr liczby naturalnej k można obliczyć za pomocą wzoru $[\log_{10} k] + 1$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Zatem powinniśmy obliczyć $[\log_{10} 3^{1994}] + 1$, ta liczba ma wartość 952 (Floor[Log[10,3^1994]] + 1). Na koniec należy się zastanowić, jak podzielenie liczby 3^{1994} przez 6 wpłynie na liczbę cyfr. Przydałaby się informacja o pierwszej cyfrze liczby 3^{1994}. W tym celu należałoby znaleźć takie k ($k = 1, 2, \ldots, 9$), aby spełniona była podwójna nierówność $k \cdot 10^{951} \leqslant 3^{1994} < (k + 1) \cdot 10^{951}$. Obliczenia numeryczne dają odpowiedź: $k = 2$. Wynika stąd, że dzieląc 3^{1994} przez 6, liczba cyfr zmniejsza się o 1. Stąd ostatecznie rozpatrywana liczba ma rzeczywiście 951 cyfr[3].

Zadanie 1.1.4 ([ETL2], ćw. 17, s. 7)
Wykaż, że iloczyn k kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez $k!$.

Jeśli w zestawie k kolejnych liczb całkowitych znajduje się zero, to podzielność oczywiście zachodzi. Ponieważ znak liczby całkowitej nie wpływa na podziel-

[3] W języku Mathematica do poszukiwania konkretnych cyfr liczby naturalnej przydają się komendy: IntegerDigits oraz FromDigits.

ność, więc możemy zakładać, że wszystkie liczby są dodatnie. Rozpatrujemy więc liczby naturalne $m+1, m+2, \ldots, m+k$; chcemy pokazać, że

$$k!|(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+k).$$

Poeksperymentujmy najpierw numerycznie[4]:

```
f[m_, k_] := Product[i, {i, m + 1, m + k}]
```

To jest definicja iloczynu $(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+k)$; zwracamy uwagę na oznaczenie zmiennych, koniecznie należy używać dolnego podkreślnika.

f[3, 5]/5! wynik 56
f[7,10]/10! wynik 19448

Uzasadnienie w przypadku ogólnym polega na zauważeniu, że

$$\tfrac{f(m,k)}{k!} = \tbinom{m+k}{m},$$

gdzie $\binom{m+k}{m}$ oznacza symbol Newtona[5]. Wystarczy teraz powołać się na własność trójkąta Pascala, który składa się z liczb naturalnych (można to udowodnić, korzystając z indukcji matematycznej).

Zadanie 1.1.5 ([ETL2], ćw. 18, s. 7)
Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, liczba $3^n + 1$ nie jest podzielna przez 2^n.

Podobnie, jak w zadaniu 1.1.1, kluczową rolę odgrywa podzielność przez 8; sprawdźmy to:

```
Table[Mod[3^n + 1,8], {n,2,20}]
{2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2}
Table[Mod[2^n, 8],{n,2,20}]
{4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
```

Skoro 8 jest dzielnikiem liczby 2^n dla każdego $n \geqslant 3$, to wystarczy sprawdzić, że 8 nie jest dzielnikiem liczby $3^n + 1$. Widać z powyższych danych, że

$$3^n (\mathrm{mod}\ 8) = \begin{cases} 4 \text{ dla } n \text{ nieparzystego,} \\ 2 \text{ dla } n \text{ parzystego.} \end{cases}$$

Jesteśmy pewni, że czytelnik poradzi sobie z uzasadnieniem własności z poprzedniej strony (można zerknąć do rozwiązania zadania 1.1.1).

---

[4] W języku Mathematica funkcja f[m,k] jest ściśle związana z funkcją Pochhammera (Pochhammer[1 + m, k]).

[5] Binomial[m, k] (Mathematica) oznacza symbol Newtona $\binom{m}{k}$.