Wśród innych prób znalezienia wzoru na liczby pierwsze warto przypomnieć próbę Fermata, który wprowadził liczby, które definiuje się tak:

Definicja
Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, liczbę $F_n = 2^{2^n} + 1$ nazywamy ***n*-tą liczbą Fermata**.

Fermat zauważył, że liczby F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 są pierwsze i postawił hipotezę, że wszystkie liczby F_n są pierwsze. Dość szybko Euler pokazał, że F_5 nie jest liczbą pierwszą, dzieli się przez 641.

Spójrzmy na rozkłady kanoniczne liczb F_n dla $n \leqslant 8$:

```
fermat[n_] := 2^(2^n)+1
Table[{n, FactorInteger[fermat[n]]}, {n, 0, 8}]
{{0, {{3, 1}}}, {1, {{5, 1}}}, {2, {{17, 1}}}, {3, {{257, 1}}}, {4, {{65537, 1}}},
{5, {{641, 1}, {6700417, 1}}}, {6, {{274177, 1}, {67280421310721, 1}}},
{7, {{59649589127497217, 1}, {5704689200685129054721, 1}}},
{8, {{1238926361552897, 1},
{93461639715357977769163558199606896584051237541638188580280321,1}}}}
Table[{n, PrimeQ[fermat[n]]}, {n, 0, 15}]
{{0, True}, {1, True}, {2, True}, {3, True}, {4, True}, {5, False}, {6, False}, {7, False},
{8, False}, {9, False}, {10, False}, {11, False}, {12, False}, {13, False}, {14, False},
{15, False}}
```

Drugi sposób, za pomocą wbudowanej funkcji PrimeQ, jest efektywniejszy. Zalecam ostrożność przy zajmowaniu się liczbami Fermata, już dla niedużych wykładników to ogromne liczby.

Zajmiemy się teraz **wzorem Sierpińskiego** na n-tą z kolei liczbę pierwszą. Ten wzór ma postać:

niech $p_1, p_2, \ldots$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych; wówczas

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 10^{-2^n} \Rightarrow p_n = \left[10^{2^n} a\right] - 10^{2^{n-1}} \left[10^{2^{n-1}} a\right].$$

Powyższy wzór, mimo bezsprzecznej urody, jest zupełnie nieprzydatny. Aby można było z niego skorzystać, należałoby znać wszystkie kolejne liczby pierwsze. Do wykazania poprawności wzoru Sierpińskiego skorzystamy z oszacowania n-tej z kolei liczby pierwszej, $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$. Szczegóły dowodu tej nierówności można znaleźć w [ETL2] (s. 47). Z tego oszacowania wynika, że szereg definiujący a jest zbieżny. Mamy wtedy $a = 0,02030\ldots$ oraz

$$\left[10^{2^n} a\right] - 10^{2^{n-1}} \left[10^{2^{n-1}} a\right] = 2030\ldots p_n - 10^{2^{n-1}} \cdot 2030\ldots p_{n-1} = p_n.$$

Kolejny wzór pojawił się w artykule Regimbala[22], który udowodnił, że

$$p_k = \sum_{m=2}^{2^k} \left[\frac{1}{a(k,m)}\right] m,$$

gdzie

$$(*) \qquad a(k,m) = 1 + \left| k - \left[1/\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{\left[\frac{m}{i}\right]}{\frac{m}{i}}\right]\right] \sum_{n=2}^{m}\left[1/\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\left[\frac{n}{i}\right]}{\frac{n}{i}}\right]\right]\right|.$$

Wzór $(*)$ wygląda dość koszmarnie, spróbujemy go teraz uzasadnić, przy czym będziemy korzystać z pewnego faktu, którego pełne wyjaśnienie pojawi się w następnym podrozdziale, a mianowicie takiego, że jeśli p_k jest k-tą z kolei liczbą pierwszą, to $p_k \leqslant 2^k$. Aby uzasadnić powyższy wzór, sprawdźmy, jaką wartość ma suma

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\left[\frac{m}{i}\right] / \left(\frac{m}{i}\right)\right]$$

dla $m > 1$.

```
reg1[m_] := Sum[Floor[Floor[m/i]/(m/i)], {i, 1, m−1}]
Table[{m, Floor[1/reg1[m]]}, {m, 2, 20}]
{{2, 1}, {3, 1}, {4, 0}, {5, 1}, {6, 0}, {7, 1}, {8, 0}, {9, 0}, {10, 0}, {11, 1}, {12, 0},
{13, 1}, {14, 0}, {15, 0}, {16, 0}, {17, 1}, {18, 0}, {19, 1}, {20, 0}}
```

Oznacza to, że dla $m > 1$

$$\left[1/\sum_{i=1}^{m-1}\left[\left[\frac{m}{i}\right] / \left(\frac{m}{i}\right)\right]\right] = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } m \in \mathbb{P}, \\ 0, \text{ jeśli } m \notin \mathbb{P}. \end{cases}$$

Tak rzeczywiście jest, gdyż wyrażenie $\left[\left[\frac{m}{i}\right] / \left(\frac{m}{i}\right)\right]$ ma wartość 1, gdy i jest dzielnikiem m, albo 0, gdy i nie jest dzielnikiem m. Natomiast suma

$$\sum_{n=2}^{m}\left[1/\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left[\frac{n}{i}\right] / \left(\frac{n}{i}\right)\right]\right]$$

to nic innego niż ilość liczb pierwszych mniejszych bądź równych m. Ponieważ w najbardziej zewnętrznej sumie wzoru $(*)$ występuje tylko jeden niezerowy składnik dla $m = p_k$, więc rzeczywiście otrzymaliśmy wzór na k-tą z kolei liczbę pierwszą.

Spójrzmy teraz na Mathematica-implementację:

```
regimbal[k_] := Sum[Floor[1/(1+Abs[k−Floor[1/reg1[m]]*Sum[Floor[1/reg1[n]]
{n, 2, m}]])]*m, {m, 2, 2^k}]
Timing[Table[regimbal[i], {i, 1, 8}]] {11.0137, {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}}
Timing[regimbal[10]]    {635.829,29}
```

[22] Regimbal S., An explicit formula for the k-th prime number, *Mathematics Magazine* **48**, 230–232 (1975).